

Научная статья
УДК 004.832
doi:10.37614/2949.1215.2024.15.3.005

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ В РАМКАХ ПАРАДИГМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОГРАНИЧЕНИЯХ

Алексей Владимирович Шестаков^{1✉}, Александр Анатольевич Зуенко²

^{1,2}Институт информатики и математического моделирования имени В. А. Путилова
Кольского научного центра Российской академии наук, Апатиты, Россия

¹a.shestakov@ksc.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0002-9052-2579>

²a.zuenko@ksc.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0002-7165-6651>

Аннотация

Статья посвящена аналитическому обзору возможностей решения задач маршрутизации транспортных средств в рамках парадигмы программирования в ограничениях. Сначала в статье приводится обзор различных постановок задачи маршрутизации транспортных средств. Затем данные постановки, для облегчения понимания, формулируются на языке целочисленного линейного программирования. После чего дается описание технологии программирования в ограничениях и приводятся типовые глобальные ограничения, полезные в различных постановках задачи маршрутизации транспортных средств. Сделан вывод о том, что гибкость в формулировке ограничений, возможность интеграции с другими методами оптимизации, а также способность учитывать неопределенности делают программирование в ограничениях одним из наиболее востребованных средств для решения задач маршрутизации.

Ключевые слова:

программирование в ограничениях, задача удовлетворения ограничений, задача маршрутизации транспортных средств

Финансирование:

работа выполнена в рамках НИР «Разработка теоретических и организационно-технических основ информационной поддержки управления жизнеспособностью региональных критических инфраструктур Арктической зоны Российской Федерации» (регистрационный номер 122022800547-3).

Для цитирования:

Шестаков А. В., Зуенко А. А. решение задач маршрутизации транспортных средств в рамках парадигмы программирования в ограничениях // Труды Кольского научного центра РАН. Серия: Технические науки. 2024. Т. 15, № 3. С. 61–68. doi:10.37614/2949.1215.2024.15.3.005.

Original article

SOLVING VEHICLE ROUTING PROBLEMS IN THE FRAMEWORK OF THE CONSTRAINT PROGRAMMING PARADIGM

Aleksey V. Shestakov^{1✉}, Alexander A. Zuenko²

¹Putilov Institute for Informatics and Mathematical Modeling of the Kola Science Centre
of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Russia

¹a.shestakov@ksc.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0002-9052-2579>

²a.zuenko@ksc.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0002-7165-6651>

Abstract

The article is devoted to an analytical survey of the possibilities of solving vehicle routing problems within the framework of the constraint programming paradigm. First, the article provides an overview of the various formulations of the vehicle routing problem. Then, to facilitate understanding, these statements are formulated in the language of integer linear programming. After that, a description of the constraint programming technology is given and typical global constraints are given that are useful in various formulations of the vehicle routing problem. It is concluded that flexibility in the formulation of constraints, the possibility of integration with other optimization methods, as well as the ability to take into account uncertainties make programming in constraints one of the most popular tools for solving vehicle routing problems.

Keywords:

Constraint programming, constraint satisfaction problem, vehicle routing problem

Acknowledgments:

the study was carried out within the framework of the Putilov Institute for Informatics and Mathematical Modeling

of the Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, research topic “Development of theoretical and organizational and technical foundations of information support for managing the viability of regional critical infrastructures of the Arctic zone of the Russian Federation” (registration number of the research topic 122022800547-3).

For citation:

Shestakov A. V., Zuenko A. A. Local search in open pit mining planning searching // Transactions of the Kola Science Centre of RAS. Series: Engineering Sciences. 2024. Vol. 15, No. 3. P. 61–68. doi:10.37614/2949.1215.2024.15.3.005.

Введение

Проблема маршрутизации транспортных средств (Vehicle Routing Problem, VRP) является одной из центральных задач в области логистики и оптимизации распределения ресурсов [1]. VRP заключается в нахождении оптимальных маршрутов для группы транспортных средств, которые должны обслуживать множество клиентов с учетом различных ограничений таких, как грузоподъемность, временные окна и множество других факторов. Неправильное решение данной задачи может привести к значительным экономическим потерям, увеличению времени доставки и снижению уровня обслуживания клиентов.

На данный момент разработано множество методов для решения VRP, включая классические оптимизационные техники такие, как линейное целочисленное программирование [2], а также различные эвристические и метаэвристические подходы [3]. Однако развитие методов программирования в ограничениях (Constraint Programming, CP) [4] значительно расширило инструментарий для решения данной задачи. Методы CP позволяют формулировать задачи в виде систем ограничений, что делает их особенно эффективными для комплексных и нестандартных сценариев, где традиционные методы могут испытывать трудности. Далее приводится аналитический обзор возможностей решения задач маршрутизации в форме задач удовлетворения ограничений.

Постановка и классификация задач маршрутизации

Задачи маршрутизации (Vehicle Routing Problems, VRP) относятся к классу комбинаторных задач оптимизации, которые связаны с поиском оптимальных маршрутов для парка транспортных средств, обслуживающих определенные объекты [5]. Основная цель VRP — минимизировать общие затраты на перевозку при выполнении всех необходимых заданий таких, как доставка товаров клиентам, сбор грузов, соблюдение временных ограничений и т. д.

Типовая VRP-задача включает в себя:

- парк транспортных средств (грузовиков, фургонов, курьеров и т. д.) с определенными характеристиками (вместимость, расход топлива, скорость);
- набор пунктов назначения (клиенты, склады, точки сбора) с различными требованиями к доставке/сбору (погрузке/выгрузке товара);
- дорожную сеть с известными расстояниями и/или временем в пути между пунктами.

Задача заключается в построении оптимальных маршрутов, по которым транспортные средства должны посетить все пункты назначения, удовлетворяя разнообразным ограничениям, при этом минимизируя общие издержки (расстояние, время, расход топлива и т. п.).

Классическая задача маршрутизации (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) [6] заключается в определении оптимальных маршрутов для обслуживания группы клиентов с помощью одного или нескольких транспортных средств, отправляющихся из общего депо.

В CVRP выделяют следующие ограничения:

- каждое транспортное средство имеет ограниченную грузоподъемность, которую оно не может превышать;
- суммарный спрос клиентов, обслуживаемых одним транспортным средством, не должен превышать его грузоподъемность;
- все клиенты должны быть обслужены в точности один раз. Нельзя пропустить ни одного клиента;
- все маршруты начинаются и заканчиваются в одном общем депо;

— все параметры задачи (спрос клиентов, расстояния/время между узлами) являются детерминированными и известными заранее.

В задаче *маршрутизации с временными окнами* (Vehicle Routing Problem with Time Windows, VRPTW) [7] к основным ограничениям CVRP также добавляется, что каждый клиент должен быть обслужен в определенный промежуток времени, называемый «временным окном». Таким образом, добавляются следующие ограничения:

- транспортное средство должно прибыть к клиенту в пределах его временного окна;
- время прибытия транспортного средства к клиенту плюс время его обслуживания не должно превышать время закрытия временного окна;
- время в пути между клиентами и депо должно также учитываться при планировании маршрутов;
- маршрут транспортного средства должен быть завершен до закрытия депо.

Для задачи *маршрутизации с ограничениями по ресурсам* (Resource-Constrained VRP, RCVRP) добавляются ограничения на различные ресурсы, необходимые для выполнения маршрутов:

- топливо/энергия — ограниченное количество топлива или энергии (заряд аккумулятора) для транспортных средств;
- время — ограничения на общее время работы, время вождения, время нахождения в пути;
- персонал — ограниченное количество водителей/экипажей для обслуживания маршрутов;
- оборудование — ограниченное количество погрузочно-разгрузочных механизмов, холодильных установок и т. д.

Задача маршрутизации транспортных средств со сбором и доставкой товаров (Vehicle Routing Problem with Pickups and Deliveries, VRPPD) [8]. В ней для каждого клиента требуется обеспечить не только доставку, но и вывоз товаров. В VRPPD необходимо определить оптимальные маршруты транспортных средств, которые обеспечивают сбор товаров у одних клиентов и их доставку другим клиентам, при этом соблюдая ограничения на грузоподъемность транспорта. Основная цель — минимизация общих затрат на перевозку. Ключевая особенность VRPPD — необходимость обеспечить соответствие между взятыми (собранными) и доставленными грузами: количество товаров, взятых у клиентов, должно соответствовать количеству товаров, доставленных другим клиентам.

Суммарная загрузка транспортного средства на маршруте (сбор + доставка) не должна превышать его грузоподъемность.

Роль программирования в ограничениях в решении VRP

В последние годы методы программирования в ограничениях (Constraint Programming, CP) становятся все более популярными в решении задач VRP. CP позволяет формулировать задачи как системы ограничений, предоставляя гибкие и мощные инструменты для обработки сложных комбинаторных задач, к которым относятся задачи VRP. Основной особенностью CP является возможность интуитивного задания и моделирования ограничений, что позволяет адаптировать подход к конкретным условиям задачи [9].

Согласно CSP (Constraint Satisfaction Problem) [10], задача представляет собой набор переменных с определенной областью возможных значений (домен) и набор некоторых ограничений. Таким образом, ограничения представляют собой отношения между переменными, в то время как задача CSP формализует, какие именно отношения должны соблюдаться для заданного множества переменных решения.

Исходя из вышеизложенного, задача удовлетворения ограничений может быть формализована в рамках инкрементного подхода следующим образом:

- исходное состояние характеризуется отсутствием значений для всех переменных;
- функция, обеспечивающая последовательность действий, требует, чтобы процесс присвоения значений исключал возможность возникновения конфликтов между переменными;
- проверка достижения цели подразумевает, что присвоенные значения должны формировать полное и согласованное решение;
- каждый этап этого процесса оценивается с фиксированной стоимостью, что упрощает анализ и оптимизацию алгоритмических процедур.

Программирование в ограничениях в первую очередь направлено на сокращение множества допустимых значений переменных решения, которые соответствуют всем установленным ограничениям. Когда происходит установление факта невозможности присвоения определенных значений переменной решения, данная информация распространяется через ограничения, что может способствовать формированию дополнительных выводов.

Для достижения окончательного решения применяются различные стратегии поиска, которые продолжаются до тех пор, пока для каждой переменной не будет назначено значение. По завершении первого успешного поиска продолжается работа над нахождением новых решений, которые обладают более оптимальными целевыми значениями.

Ключевым элементом СР является возможность представления задач в компактной и понятной форме. Однако по мере увеличения сложности проблем, связанных с множеством переменных и ограничений, возникает необходимость в более высокоуровневых конструкциях, которые могут облегчить процесс моделирования и упростить решение. Одним из наиболее эффективных инструментов, используемых для этого, являются *глобальные ограничения* [11].

Глобальные ограничения представляют собой специальные классы ограничений в рамках программирования в ограничениях, которые фиксируют связь между заранее не известным числом переменных. В отличие от простых ограничений, которые обычно накладываются на одну или две переменные и имеют специфическую форму, глобальные ограничения охватывают более широкий спектр взаимосвязей, позволяя формулировать более сложные условия.

Такие ограничения характеризуются высокой степенью абстракции, представляя сложные отношения между группами переменных в компактной форме. Они могут быть заданы различными способами. Примером может служить ограничение $alldifferent(x_1, \dots, x_n)$, которое определяет, что значения, присваиваемые переменным $x_1, \dots, x_n$, должны быть попарно различными.

Многие глобальные ограничения могут быть связаны с внутренними структурами, которые представляют возможные значения и правила для переменных (например, конечные автоматы в случае регулярных ограничений).

Ключевыми характеристиками глобальных ограничений являются:

возможность моделировать сложные взаимоотношения, которые не могут быть адекватно выражены с помощью простых ограничений;

оптимизированные решатели могут использовать глобальные ограничения для сокращения пространства поиска и устранения неэффективных подмножеств.

Обычные ограничения, как правило, ограничиваются парами переменных или незначительными группами, и их выражение может потребовать большого количества отдельных условий для описания более сложных взаимосвязей. Например, для обеспечения уникальности значений в группе из 10 переменных с помощью отдельных ограничений потребуются 45 простых ограничений (поскольку необходимо убедиться в уникальности каждой пары), в то время как с помощью глобального ограничения $alldifferent$ эта задача может быть выражена одной строкой.

Представление VRP в виде задачи целочисленного линейного программирования (ILP)

Рассмотрим формулировку ILP из [12]. Пусть задано множество клиентов $C = \{1, \dots, n\}$ и транспортных средств $M = \{1, \dots, m\}$. Для индексации склада в начале маршрута используется 0, а для индексации склада в конце маршрута — $n+1$. $N = C \cup \{0, n+1\}$.

В рассматриваемой постановке используются следующие обозначения:

- а) в качестве переменных выступают x_{ijk} ($i, j \in N$, $k \in M$), причем x_{ijk} равна 1, если автомобиль k едет напрямую от клиента i к клиенту j , 0 — в противном случае;
- б) c_{ij} — стоимость путешествия из i в j , $i, j \in N$;
- с) τ_{ij} — время в пути от i до j , $i, j \in N$, включающее в себя время обслуживания у клиента i ;
- д) δ_{ij} — расстояние от i до j , $i, j \in N$;
- е) r_i — спрос для клиента $i \in N$;
- ф) Q_k — вместимость транспортного средства $k \in M$;

г) a_i, b_i — временные окна клиентов $i \in N$;

h) K — целое число.

Главная цель задачи VRP — минимизировать сумму затрат (1):

$$\text{minimise } z_{VRP} = \sum_{k \in M} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ijk}. \quad (1)$$

Определим ограничения для задачи VRP.

Каждый клиент должен быть посещен ровно один раз (2):

$$\sum_{k \in M} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in C. \quad (2)$$

Пропускная способность (в предположении неоднородного парка транспорта):

$$\sum_{j \in C} r_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in M. \quad (3)$$

Ограничение (4–6) для обеспечения потока транспортных средств от начального склада, через 0 или более клиентов к конечному складу:

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in M, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0 \quad \forall h \in C, \forall k \in M, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i(n+1)k} = 1 \quad \forall k \in M. \quad (6)$$

Обеспечение отсутствия подтуров (циклов, не включающих депо) описывается ограничениями (7–8):

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq C, \quad (7)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \in N, \forall k \in M. \quad (8)$$

Ограничение для определения времени прибытия к каждому клиенту (9):

$$t_{ik} + \tau_{ij} - K(1 - x_{ijk}) \leq t_{jk} \quad \forall i,j \in N, \forall k \in M. \quad (9)$$

Обеспечение соблюдения временных окон происходит при помощи ограничения (10):

$$a_i \leq t_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, \forall k \in M. \quad (10)$$

Формулирование задач маршрутизации в форме задач удовлетворения ограничений

В данной формулировке [13], аналогично ситуации с ILP, рассматривается n заказов от клиентов и парк из m транспортных средств. Термин «визит» используется для обозначения момента, когда транспортное средство осуществляет остановку. Каждому клиенту соответствует одно посещение, в то время как на каждое транспортное средство приходится два специальных визита для моделирования начальной и конечной точек маршрута транспортного средства.

Пусть $C = \{1, \dots, n\}$ — множество клиентов, $M = \{1, \dots, m\}$ — множество транспортных средств и $V = \{1, \dots, n + 2m\}$ — множество визитов. Первый и последний визит транспортного средства k обозначается f_k и l_k соответственно. Визит $f_k = n + k$ соответствует первому визиту транспортного средства k , а $l_k = n + m + k$ — последнему. $F = \{n + 1, \dots, n + m\}$ и $L = \{n + m + 1, \dots, n + 2m\}$ — множества первых и последних визитов соответственно. $C = \{1, \dots, n\}$ — клиенты. Также введем обозначения:

- a) $q_i \geq 0$ — количество товаров в транспортном средстве после выполнения визита i ;
- b) Q_k — грузоподъемность транспортного средства k ;
- c) v_i — транспортное средство, выполняющее визит i ;
- d) $r_i \neq 0$ — количество товаров, которое нужно забрать во время визита i ;
- e) s_i — прямой приемник визита i ;
- f) $t_i \geq 0$ — время начала обслуживания визита i ;
- g) p_i — целочисленная переменная, моделирует прямого предшественника каждого визита $i \in V$.

Каждый «первый» визит транспортного средства имеет в качестве предшественника «последний» визит транспортного средства ($\forall k \in M \ p_{jk} = l_k$). Таким образом, переменные-предшественники образуют перестановку V и подчиняются глобальным ограничениям *alldiff constraint* (11):

$$p_i \neq p_j \ \forall i, j \in V \wedge i < j \quad . \quad (11)$$

Переменные-преемники поддерживаются «когерентными» (согласованными) с переменными-предшественниками с помощью глобальных ограничений *element constraint* (12):

$$s_{p_i} = i \ \forall i \in V - F \quad p_{s_i} = i \ \forall i \in V - L. \quad (12)$$

Для первого и последнего визитов накладываются ограничения: $\forall k \in M \ v_{jk} = v_{lk} = k$.

На маршруте все визиты выполняются одним и тем же транспортным средством (13):

$$v_i = v_{p_i} \ \forall i \in V - F \quad v_i = v_{s_i} \ \forall i \in V - L. \quad (13)$$

Ограничения пути (*path constraint*) (14) гарантирует, что количество товаров на борту транспортного средства остается в допустимых пределах:

$$q_i = q_{p_i} + r_i \ \forall i \in V - F \quad q_i = q_{s_i} - r_i \ \forall i \in V - L. \quad (14)$$

Ограничение вместимости транспортного средства (15):

$$q_i \leq Q_{v_i} \ \forall i \in V. \quad (15)$$

Для задачи VRPTW добавляется ограничение времени движения транспортных средств по маршрутам (16):

$$t_i \geq t_{p_i} + \tau_{p_i, i} \ i \in V - F \quad t_i \leq t_{s_i} - \tau_{i, s_i} \ i \in V - L. \quad (16)$$

Временные окна для клиентов задаются путем добавления ограничений на переменные t . Ограничение $a \leq t_i \leq b$ означает, что клиент i должен быть посещен в промежуток времени между a и b . Для моделирования нескольких временных окон используется ограничение (17) [4]:

$$a \leq t_i \leq d \text{ и } b_i \leq b \vee t_i \geq c. \quad (17)$$

Ограничения (17) означают, что клиент i должен быть посещен либо в промежуток времени между a и b , либо в промежуток времени между c и d ($a \leq b \leq c \leq d$).

Различные транспортные средства могут иметь различные доступные временные окна. Введем следующие обозначения:

- a) O_k — самое раннее время маршрута начала движения транспортного средства k ;
- b) H_k — его самое позднее время окончания движения, или горизонт;
- c) $\delta_{i,j}$ — расстояние от визита i до j ;
- d) C_k — это стоимость единицы расстояния для транспортного средства k .

Ограничения на время доступности транспортных средств (18):

$$O_{v_i} \leq t_i \leq H_{v_i} \ \forall i \in V. \quad (18)$$

Функция затрат обычно представляет собой общее пройденное расстояние d (19):

$$d = \sum_{i \in V - F} \delta_{p_i, i} \quad d = \sum_{i \in V - L} \delta_{i, s_i}. \quad (19)$$

Если стоимость километра зависит от используемого транспортного средства, функция затрат определяется как (20):

$$d = \sum_{i \in V - F} C_{v_i} \delta_{p_i, i} \quad d = \sum_{i \in V - L} C_{v_i} \delta_{i, s_i}. \quad (20)$$

Для задачи VRPPD:

- a) $r_i \leq 0$ — для доставки товара;
- b) $r_i \geq 0$ — для вывоза товара;

- с) o — заказ;
- д) o_p — визит для доставки товара;
- е) o_d — визит для вывоза товара.

Вывоз и доставка должны осуществляться одним и тем же транспортным средством (21):

$$v_{o_p} = v_{o_d} \quad t_{o_p} < t_{o_d}. \quad (21)$$

Прямая связь от пункта самовывоза до пункта доставки не допускается, вывоз производится после доставки (22):

$$s_i \neq j \quad \forall i \in P \quad \forall j \in D \quad \text{где } P = \{i | r_i > 0\} \text{ и } D = \{i | r_i < 0\}. \quad (22)$$

Заключение

В данной статье рассмотрена одна из ключевых задач в области логистики и эффективного управления ресурсами — задача маршрутизации транспортных средств (VRP). Приводится аналитический обзор возможностей решений задач VRP как задач удовлетворения ограничений.

Методы CP предлагают мощный инструмент для масштабируемого и гибкого моделирования VRP, обеспечивая возможность эффективно управлять множеством ограничений, характерных для данной задачи. Гибкость в формулировке ограничений, возможность интеграции с другими методами оптимизации, а также способность учитывать неопределенности делают CP уникальным решением для повышения качества маршрутизации.

Практические примеры применения CP демонстрируют его эффективность в решении различных постановок задач VRP. Эти примеры подтверждают, что применение CP позволяет значительно улучшать производительность логистических процессов и снижать операционные затраты.

Список источников

1. Laporte G. Fifty Years of Vehicle Routing // *Transportation Science*. 2009. Vol. 43, № 4. P. 408–416.
2. Çam Ö. N., Sezen H. K. The formulation of a linear programming model for the vehicle routing problem in order to minimize idle time // *Decision Making: Applications in Management and Engineering*. 2020. Vol. 3, № 1. P. 22–29.
3. Gendreau M., Potvin J. Metaheuristics in Combinatorial Optimization // *Annals of Operations Research*. November 2005. Vol. 140, № 1. P. 189–213.
4. Pesant G., Gendreau M., Potvin J., Rousseau J. An exact constraint logic programming algorithm for the travelling salesman with time windows // *Transportation Science*. 1998. Vol. 32, № 1. P. 22–29.
5. Toth P., Vigo D. An Overview of Vehicle Routing Problems // *The Vehicle Routing Problem*. 2002. Vol. 9. P. 1–26.
6. Paraskevopoulos D. C., Laporte G., Repoussis P. P., Tarantilis C. D. Resource constrained routing and scheduling: Review and research prospects // *European Journal of Operational Research*. 2017. Vol. 263, № 3. P. 737–754.
7. Braysy O., Gendreau M. Vehicle routing problem with time windows, part I: Route construction and local search algorithms // *Transportation Science*. 2005. Vol. 39, № 1. P. 104–118.
8. Lu Q., Dessouky M. An exact algorithm for the multiple vehicle pickup and delivery problem // *Transportation Science*. 2004. Vol. 38, № 4. P. 503.
9. Desrosiers J., Dumas Y., Solomon M. M., Soumis F. Time constrained routing and scheduling // *Network Routing*. Vol. 8. 1995. P. 35–139.
10. Montanari U. Networks of constraints: fundamental properties and applications to picture processing // *Information Sciences*. 1974. Vol. 7. P. 95–132.
11. Regin J. C. Global Constraints: A Survey // *Hybrid Optimization. Springer Optimization and Its Applications*. 2011. Vol. 45. P. 13–32.
12. Kallehauge B., Larsen J., Madsen O. B. Lagrangean duality applied on vehicle routing with time windows // *Computers and Operations Research*. 2001. Vol 33. P. 1464–1487.
13. De Backer B., Furnon V., Prosser P., Kilby P., Shaw P. Solving vehicle routing problems using constraint programming and metaheuristics // *Journal of Heuristics*. 2000. Vol. 6. №4. P. 501–523.

References

1. Laporte G. *Fifty Years of Vehicle Routing*. Transportation Science, 2009, vol. 43, no. 4, pp. 408–416.
2. Çam Ö. N., Sezen H. K. *The formulation of a linear programming model for the vehicle routing problem in order to minimize idle time*. Decision Making: Applications in Management and Engineering, 2020, vol. 3, no. 1, pp. 22–29.
3. Gendreau M., Potvin J. *Metaheuristics in Combinatorial Optimization*. Annals of Operations Research, 2005, vol. 140, no. 1, pp. 189–213.
4. Pesant G., Gendreau M., Potvin J., Rousseau J. *An exact constraint logic programming algorithm for the travelling salesman with time windows*. Transportation Science, 1998, vol. 32, no. 1, pp. 22–29.
5. Toth P., Vigo D. *An Overview of Vehicle Routing Problems*. The Vehicle Routing Problem, 2002, vol. 9, pp. 1–26.
6. Paraskevopoulos D.C., Laporte G., Repoussis P.P., Tarantilis C.D. *Resource constrained routing and scheduling: Review and research prospects*. European Journal of Operational Research, 2017, vol. 263, no. 3, pp. 737–754.
7. Braysy O., Gendreau M. *Vehicle routing problem with time windows, part I: Route construction and local search algorithms*. 2005. Transportation Science, vol. 39, no. 1, pp. 104–118.
8. Lu Q., Dessouky M. *An exact algorithm for the multiple vehicle pickup and delivery problem*. Transportation Science, 2004, vol. 38, no. 4, pp. 503–514.
9. Desrosiers J., Dumas Y., Solomon M. M., Soumis F. *Time constrained routing and scheduling*, 1995, Network Routing, vol. 8, pp. 35–139.
10. Montanari U. *Networks of constraints: fundamental properties and applications to picture processing*. Information Sciences, 1974, vol. 7, pp. 95–132.
11. Regin J. C. *Global constraints: A survey*. Hybrid Optimization. Springer Optimization and Its Applications, 2011, vol. 45, pp. 13–32.
12. Kallehauge B., Larsen J., Madsen O. B. *Lagrangian duality applied on vehicle routing with time windows*. Computers and Operations Research, 2001, vol. 33, pp. 1464–1487.
13. De Backer B., Furnon V., Prosser P., Kilby P., Shaw P. *Solving vehicle routing problems using constraint programming and metaheuristics*. Journal of Heuristics, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 501–523.

Информация об авторах

А. В. Шестаков — стажер-исследователь;

А. А. Зуенко — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник.

Information about the authors

A. V. Shestakov — Intern Researcher at the IIMM of the KSC RAS

A. A. Zuenko — Candidate of Science (Tech.), Leading Researcher of the Putilov Institute for Informatics and Mathematical Modeling Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences.

Статья поступила в редакцию 17.10.2024; одобрена после рецензирования 01.11.2024; принята к публикации 08.11.2024.
The article was submitted 17.10.2024; approved after reviewing 01.11.2024; accepted for publication 08.11.2024.