

Научная статья  
УДК 553.062/.067, 553.251, 553.21/.24, 515.14  
doi:10.37614/2949-1215.2025.16.4.030

## АНАЛИЗ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУР НА ПРИМЕРЕ МИКРОТОМОГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

**Василий Витальевич Тимошенко<sup>1</sup>, Михаил Валерьевич Чернявский<sup>2</sup>, Диана Владимировна Мануковская<sup>3</sup>,  
Андрей Олегович Калашников<sup>4</sup>, Евгений Александрович Грачев<sup>5</sup>**

<sup>1, 2, 5</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт химии и технологии редких элементов и минерального сырья имени  
И. В. Тананаева Кольского научного центра Российской академии наук, Апатиты, Россия

<sup>4</sup>Геологический институт Кольского научного центра Российской академии наук, Апатиты, Россия

<sup>4</sup>Инженерная школа, Апатитский филиал Мурманского арктического университета, Апатиты, Россия

<sup>1</sup>timvasv2gg@gmail.com, <http://orcid.org/0009-0008-5916-8867>

<sup>2</sup>chernjavskiy.mv15@physics.msu.ru, <http://orcid.org/0009-0009-6996-141X>

<sup>3</sup>d.manukovskaia@ksc.ru, <http://orcid.org/0000-0002-9139-3502>

<sup>4</sup>a.kalashnikov@ksc.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6766-7174>

<sup>5</sup>grachevea@gmail.com

### Аннотация

В работе представлен метод количественного описания внутренней 3D-структуры природного образца (меймечит) на основе интегральной геометрии и алгебраической топологии. В качестве исходных данных используется микротомографическое изображение (разрешение — 51 мкм); изображение сегментируется по уровням рентгеновской плотности методом multi-Otsu, после чего для выделенных фаз извлекаются связанные компоненты и вычисляются инвариантные интегрально-геометрические характеристики — функционалы Минковского  $M_0$ – $M_3$  и соответствующие им числа Бетти  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ . Предложен и проверен на устойчивость классификатор корректности сегментации на основе поведения  $M_0$ – $M_2$ ; детальная топологическая интерпретация комбинаций фаз позволила связать вычисленные топологические параметры с геологическими и минералогическими особенностями образца.

### Ключевые слова:

микротомография, сегментация, multi-Otsu, функционалы Минковского, числа Бетти, связанные компоненты, топологический анализ.

### Благодарности:

статья выполнена при поддержке федерального бюджета по теме государственного задания Института химии и технологии редких элементов и минерального сырья им. И. В. Тананаева Кольского научного центра Российской академии наук № FMEZ-2025-0055; Геологического института Кольского научного центра Российской академии наук № FMEZ-2024-0008; Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

### Финансирование:

государственное задание по теме НИР № FMEZ-2025-0055; № FMEZ-2024-0008; МГУ.

### Для цитирования:

Тимошенко В. В., Чернявский М. В., Мануковская Д. В., Калашников А. О., Грачев Е. А. Анализ топологических особенностей трехмерных структур на примере микротомографического изображения // Труды Кольского научного центра РАН. Серия: Технические науки. 2025. Т. 16, № 4. С. 159–162. doi:10.37614/2949-1215.2025.16.4.030.

Original article

## ANALYSIS OF TOPOLOGICAL FEATURES OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES USING X- $\mu$ CT IMAGES

**Vasiliy V. Timoshenko<sup>1</sup>, Mikhail V. Chernyavskiy<sup>2</sup>, Diana V. Manukovskaya<sup>3</sup>, Andrey O. Kalashnikov<sup>4</sup>  
Evgeniy A. Grachyov<sup>5</sup>**

<sup>1, 2, 5</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia <sup>3</sup>Tananaev Institute of Chemistry — Subdivision of the Federal Research Centre «Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences», Apatity, Russia

<sup>4</sup>Geological Institute — Subdivision of the Federal Research Centre «Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences», Apatity, Russia

<sup>4</sup>Engineering School of the Apatity branch of the Murmansk Arctic University, Apatity, Russia

<sup>1</sup>timvasv2gg@gmail.com, <http://orcid.org/0009-0008-5916-8867>

<sup>2</sup>chernjavskiy.mv15@physics.msu.ru, <http://orcid.org/0009-0009-6996-141X>

<sup>3</sup>d.manukovskaia@ksc.ru, <http://orcid.org/0000-0002-9139-3502>

<sup>4</sup>a.kalashnikov@ksc.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6766-7174>

<sup>5</sup>grachevea@gmail.com

## Abstract

This study presents a method for quantitative description of the internal 3D structure of a natural sample (meimechite) based on integral geometry and algebraic topology. Microtomography (with 51  $\mu\text{m}$  voxel resolution) was used as the source data. The image was segmented into phases according to X-ray density levels using the multi-Otsu method. For each phase, connected components were extracted, and invariant integral-geometric characteristics were computed — Minkowski functionals  $M_0$ – $M_3$  and their corresponding Betti numbers  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ . A segmentation quality classifier based on the behavior of  $M_0$ – $M_2$  was proposed and tested for stability. A detailed topological interpretation of combined phases allowed the identified topological signatures to be related to the geological and mineralogical features of the sample.

## Keywords:

microtomography, segmentation, multi-Otsu, Minkowski functionals, Betti numbers, connected components, topological analysis

## Acknowledgments:

the article was supported by the federal budget on the topic of the state assignment of the I. V. Tananaev Institute of Chemistry and Technology of Rare Elements and Mineral Resources of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences No. FMEZ-2025-0055; Geological Institute of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences No. FMEZ-2024-0008; and M. V. Lomonosov Moscow State University.

## Funding:

state assignment on the topic of research and development No. FMEZ-2025-0055; No. FMEZ-2024-0008; Moscow State University.

## For citation:

Timoshenko V. V., Chernyavsky M. V., Manukovskaya D. V., Kalashnikov A. O., Grachev E. A. Analysis of topological features of three-dimensional structures using X- $\mu$ CT images // Proceedings of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Series: Technical Sciences. 2025. Vol. 16, No. 4. pp. 159–162. doi:10.37614/2949-1215.2025.16.4.030.

## Введение

Современные методы трехмерной визуализации внутренней структуры, в частности рентгеновская микротомография, открывают широкие возможности для исследования внутреннего строения минералов, горных пород и композитных материалов без разрушения образца. Такие методы позволяют получать детализированные объемные изображения, на которых фиксируются не только размеры и формы зерен, но и распределение фаз, наличие пор, трещин и каналов. Для интерпретации подобных данных требуется надежный математический аппарат, обеспечивающий количественное и воспроизводимое описание наблюдаемых структур.

Традиционно для анализа микротомографических изображений применялись подходы, основанные на фрактальной геометрии, морфометрических характеристиках или статистическом распределении размеров частиц [1]. Однако в последние десятилетия все большее внимание уделяется методам интегральной геометрии и алгебраической топологии, которые позволяют описывать не только метрические, но и топологические свойства трехмерных объектов [2, 3]. Эти подходы оперируют с так называемыми функционалами Минковского, которые служат универсальными инвариантами формы и связности, а также с бетти-числами, отражающими число компонент связности, «туннелей» и замкнутых пустот в структуре.

Одним из ключевых этапов такого анализа является сегментация изображения, т. е. разбиение исходного томографического объема на отдельные фазы по различию в рентгеновской плотности. Для этого применяются различные алгоритмы: от классических пороговых методов [4] до их многоклассовых модификаций [5], позволяющих автоматически находить оптимальные границы между фазами. В геологических задачах сегментация особенно критична, поскольку точность последующих вычислений напрямую зависит от корректного выделения минералов и их границ.

На следующем этапе выделяются связные компоненты внутри каждой фазовой маски. Для этого применяются специализированные алгоритмы поиска компонент связности в трехмерной решетке, например, реализованные в библиотеке `sc3d`. Такой подход позволяет перейти от абстрактного бинарного изображения к конкретным объектам — зернам, порам, кластерам, — которые затем можно анализировать индивидуально.

На выделенных объектах вычисляются функционалы Минковского ( $M_0$ – $M_3$ ) и связанные с ними бетти-числа. Эти показатели дают компактное, но информативное описание внутренней структуры: объем ( $M_0$ ), площадь поверхности ( $M_1$ ), интегральная средняя кривизна ( $M_2$ ), а также характеристика Эйлера ( $M_3$ ), связанная с топологической связностью. В геологических приложениях подобные характеристики позволяют, например, выявить особенности распределения минералов, оценить пористость и связанность каналов или установить наличие изолированных включений.

Таким образом, сочетание сегментации, выделения компонент связности и топологического анализа дает мощный инструментарий для количественного описания трехмерной микроструктуры. Данный подход уже доказал свою эффективность в исследованиях горных пород, пористых сред и композитов. В настоящей работе основное внимание уделено именно тому, как корректно провести сегментацию микротомографического изображения и каким образом рассчитанные на ее основе топологические параметры могут быть использованы для интерпретации геологических и минералогических особенностей образца.

## Материалы и методы

Образец меймечита был выбран из-за присутствия множества различных включений. Включения и наличие нескольких рентгеноплотностных фаз делают образец удобной моделью для отработки методов многоклассовой сегментации и последующего топологического анализа. Съемка выполнялась на рентгеновском микротомографе в режиме спиральной реконструкции. Параметры съемки: — разрешение вокселя — 51 мкм; разрешение среза —  $2024 \times 2024$  пикселя и итоговый объем из 436 срезов.

Из исходного трехмерного изображения в оттенках серого были выделены рентгеноплотностные фазы. Для выбора порогов используется метод multi-Otsu (множественное расширение классического Otsu), который минимизирует внутриклассовую дисперсию при разбиении гистограммы на заданное число классов. После оптимизации порогов для каждой фазы получается бинарный объем (маска) этой фазы.

Для каждой фазовой маски применяется алгоритм поиска связанных компонент — реализованный через библиотеку `sc3d` (функция `connected components`). В работе была использована 26-связность для минимизации расщепления тонких каналов. В результате был получен набор объектов-связных компонент, каждая из которых далее рассматривается отдельно при вычислении геометрических инвариантов.

Для каждого объекта вычисляются четыре функционала Минковского в 3D:  $M_0$  (объем  $V$ ),  $M_1$  (площадь поверхности  $S$ ),  $M_2$  (интегральная средняя кривизна  $C$ ) и  $M_3$  (характеристика Эйлера/Эйлера – Пуанкаре  $\chi$ ).  $M_3$  — характеристика Эйлера – Пуанкаре  $\chi = b_0 - b_1 + b_2$ ). Практически  $M_0$ –  $M_2$  дают непрерывные метрики формы и размера, а  $M_3$  (и отдельные  $b_i$ ) — дискретную топологическую информацию о связности, наличии туннелей и изолированных пустот. Функционалы Минковского и числа Бетти вычислялись с помощью общепринятых методов из библиотек `Quantimpy` и `MatImage` для Python и MATLAB.

## Результаты

На примере меймечита было выделено 4 рентгеноплотностные фазы (соответствие минералам проверялось по известным описаниям и по распределению интенсивностей). После сегментации методом multi-Otsu-бинаризации каждая фаза была представлена отдельной маской; извлечение компонент показало разнообразие размеров: от единичных вокселей до объемных зерен размером миллиметрового порядка (в воксельном выражении).

Вычисленные на связных компонентах функционалы  $M_0$ –  $M_2$  продемонстрировали устойчивую и различимую группировку объектов по форме и объему; плоскостная аппроксимация этих метрик дала высокое  $R^2$  для основных фаз, что использовано как независимая проверка топологической корректности сегментации.

Анализ  $M_3$  и чисел Бетти выявил: для оливина (фаза с выраженной зернистой структурой) — высокая  $b_1$  (много «туннелей», каналов), для серпентинита — сеть, опоясывающая оливин, а для магнитита — множество мелких, почти изолированных включений (высокое  $b_0$  и почти нулевое  $b_1$ ). Сравнение сумм отдельных чисел Бетти и чисел Бетти объединенных фаз позволило формально доказать наличие каналов, заполненных одними минералами и окруженных другими.

## Выводы

Подход, сочетающий сегментацию, извлечение связных компонент и вычисление функционалов Минковского вместе с анализом чисел Бетти, дает компактный и информативный набор количественных признаков для описания 3D-структуры пористых и зернистых материалов, в котором  $M_0$ –  $M_2$  служат как метрики размера и формы, а  $M_3$  и  $b_i$  дают прямую топологическую интерпретацию (количество изолированных объемов, туннелей и компонент). Сопоставление этих метрик между фазами и их комбинациями позволяет формулировать геолого-генетические гипотезы о формировании минеральных ассоциаций.

#### Список источников

1. Higgins, M. D. Quantitative Textural Measurements in Igneous and Metamorphic Petrology 403 (Cambridge University Press, 2006).
2. Michielsen, K. & Raedt, H. Integral-geometry morphological image analysis. Phys. Rep. 347, 461–538. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00106-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00106-X) (2001).
3. Mantz, H., Jacobs, K. & Mecke, K. Utilising minkowski functionals for image analysis: a marching square algorithm. J. Stat. Mech. 12, P12015. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/12/P12015> (2008).
4. Otsu, N. A threshold selection method from gray-level histograms. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 9, 62–66. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1979.4310076> (1979).
5. Liao, P.-S., Chen, T.-S. & Chung, P.-C. A fast algorithm for multilevel thresholding. J. Inf. Sci. Eng. 17(5), 713–727.

#### References

1. Higgins, M. D. Quantitative Textural Measurements in Igneous and Metamorphic Petrology 403 (Cambridge University Press, 2006).
2. Michielsen, K. & Raedt, H. Integral-geometry morphological image analysis. Phys. Rep. 347, 461–538. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00106-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00106-X) (2001).
3. Mantz, H., Jacobs, K. & Mecke, K. Utilising minkowski functionals for image analysis: a marching square algorithm. J. Stat. Mech. 12, P12015. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/12/P12015> (2008).
4. Otsu, N. A threshold selection method from gray-level histograms. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 9, 62–66. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1979.4310076> (1979).
5. Liao, P.-S., Chen, T.-S. & Chung, P.-C. A fast algorithm for multilevel thresholding. J. Inf. Sci. Eng. 17(5), 713–727.

#### Информация об авторах

**В. В. Тимошенко** — аспирант;

**М. В. Чернявский** — аспирант

**Д. В. Мануковская** — младший научный сотрудник;

**А. О. Калашников** — кандидат геологических наук, ведущий научный сотрудник, директор;

**Е. А. Грачев** — кандидат технических наук доцент.

#### Information about the authors

**V. V. Timoshenko** — PhD student;

**M. V. Chernyavskiy** — PhD student;

**D. V. Manukovskaya** — Junior researcher;

**A.O. Kalashnikov** — PhD (Geology), Senior Researcher; Director;

**E. A. Grachyov** — PhD (Technology), Associate professor.

Статья поступила в редакцию 30.06.2025; одобрена после рецензирования 25.08.2025; принята к публикации 27.08.2025.  
The article was submitted 30.06.2025; approved after reviewing 25.08.2025; accepted for publication 27.08.2025.